$$* \frac{b}{1-a} = \frac{i}{1+e^{i\frac{2\pi}{3}}} = \frac{i}{e^{i\frac{\pi}{3}}(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}})} = \frac{ie^{-i\frac{\pi}{3}}}{2\cos(\frac{\pi}{3})} = e^{i\frac{\pi}{2}}e^{-i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

d'où Ω est d'affixe $e^{i\frac{\pi}{6}}$

$$* \ a = -e^{i\frac{2\pi}{3}} = e^{i(\frac{2\pi}{3}-\pi)} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \text{ d'où } \arg(a) \equiv -\frac{\pi}{3}(2\pi)$$

Conclusion : f est une rotation de centre $\Omega(e^{i\frac{\pi}{6}})$ et d'angle : $-\frac{\pi}{3}$.

2°/ On a : $\forall n \in \mathbf{N}$; $Z_{n+1} = z_{n+1} - e^{i\frac{\pi}{6}}$.

Or z_{n+1} est l'affixe de $M_{n+1} = f(M_n) \Rightarrow z_{n+1} = -e^{i\frac{2\pi}{3}} z_n + i$

$$\Rightarrow Z_{n+1} = -e^{i\frac{2\pi}{3}} z_n + i - e^{i\frac{\pi}{6}} = -e^{i\frac{2\pi}{3}} z_n + e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$= -e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_n - e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{2}}) = -e^{i\frac{2\pi}{3}}(z_n - e^{i\frac{\pi}{6}})$$

Conclusion : $Z_{n+1} = -e^{i\frac{2\pi}{3}} Z_n = e^{-i\frac{\pi}{3}} Z_n$

b) $a^p = 1 \Leftrightarrow \left(-e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^p = 1 \Leftrightarrow e^{-i\frac{\pi}{3}p} = 1 \Leftrightarrow p\frac{\pi}{3} \equiv 0\,(2\pi)$

$$\Leftrightarrow p\frac{\pi}{3} = 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow p = 6k \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Conclusion : L'ensemble des entiers naturels p tels que

$a^p = 1$ et $\{6k, \quad k \in \mathbf{N}\}$

c) On a : $Z_{n+1} = aZ_n$

$Z_1 = aZ_0$

$Z_2 = aZ_1 = a^2 Z_0$